ELEMENTARNA LOGIČKA KOLA

George Boole (1815-1864).

- sin obućara
- prekinuo školovanje nakon trećeg razreda
- postao je briljantan naučnik - predavao latinski i grčki jezik
- poznati matematičar po doprinosima u oblasti diferencijalnih jednačina i u algebri
- pokušao da izvede matematičku analizu mišljenja (logike) - uspostvio je "logičku algebru" 1854

Claude E. Shanon

- 1938. god. u svojoj magistarskoj tezi na MIT-u (*Massachusetts Institute of Technology - Boston*), opisao metod za predstavljanje sklopova od (tada elektromehaničkih) prekidača, skupom matematičkih izraza na bazi Booleove algebre.
- Ta metoda se i danas koristi za dizajn i analizu prekidačkih kola
- prednosti matematskog opisivanja rada logičkih sklopova - lakše je projektovati pomoću algebarskih izraza koji opisuju prekidačka kola, nego pomoću šema ili logičkih dijagrama

Booleova algebra

- Varijable mogu imati jednu od vrijednosti iz skupa {0,1}
- skup operacija nad varijablama $\{+, \times, /\}$
- **logičko sabiranje** - X+Y=Z se može čitati

"X ili Y jednako Z" ili "X plus Y jednako Z”

- **logičko množenje** - $X \times Y = Z$ se može čitati
- "X i Y jednako Z" ili "X puta Y jednako Z”
- **Invertovanje** X=/Y “X jednako ne-Y”

Logička kola

1. Osnovna logička kola
2. Kombinatorne mreže
3. Sekvencijalne mreže

Aksiome i teoreme Bulove algebre

- **Osnova za rad digitalnih kola su logičke operacije nad iskazima koji mogu da imaju samo dve istinitosne vrednosti:**
  - **TAČAN (TRUE)**
  - **NETAČAN (FALSE)**
- **Da bi skup S = {x, y, z,….}, gde x, y, z,…$\in$(0, 1) i operandi definisani na ovom skupu:**

+	**logičko sabiranje (ILI)**	***BINARNI OPERANDI***
•	**logičko množenje (I)**	***BINARNI OPERANDI***
¯ '	**negacija (NE)**	***UNARNI OPERAND***

predstavljali Bulovu algebru moraju da budu zadovoljene aksiome i teoreme Hantingtona

Logičko I

Logičko I odnosno konjunkcija, čini logički proizvod nezavisno promenljivih. Kola koja realizuju ovu funkciju nazivamo logičkim I kolima (AND).

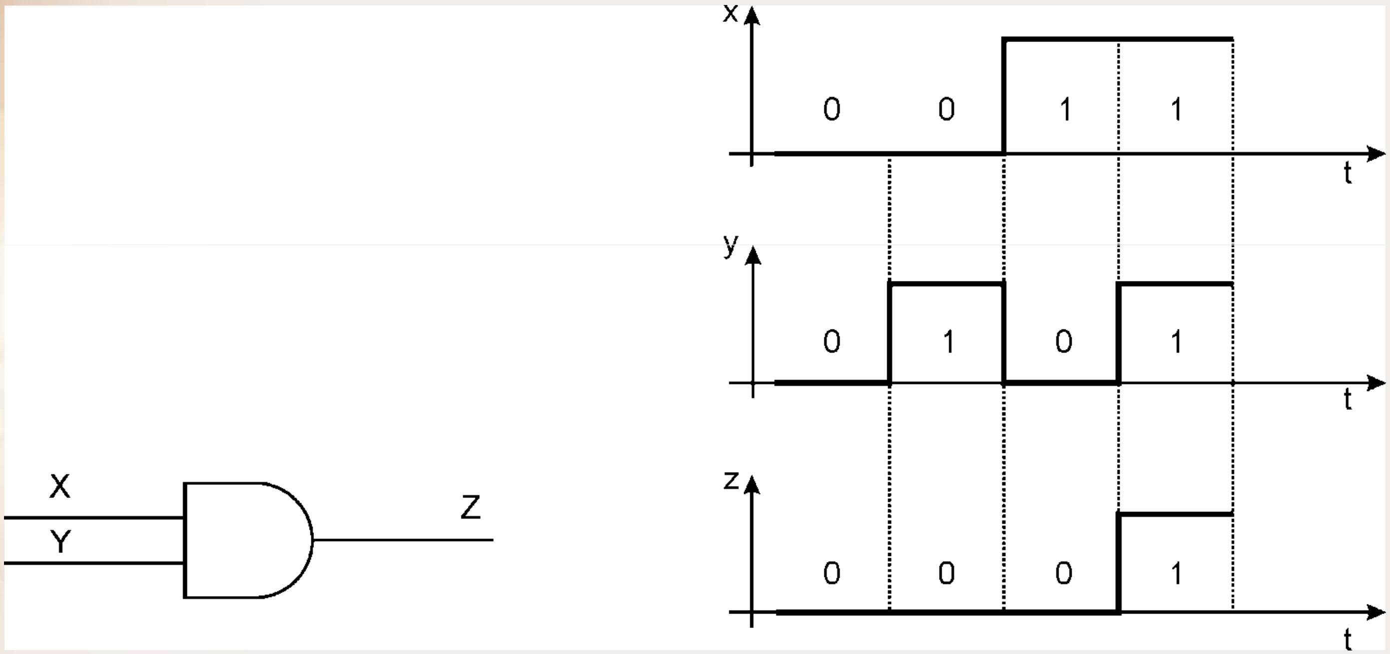
Logičko I

Iz kombinacione tabele konjunkcije vidimo da ako su svi ulazi I kola nula, i izlaz mora biti nula, vidi se da ako je samo jedan od ulaza nula, izlaz je takođe nula (tabela). Samo u slučaju kada su svi ulazi na nivou logičke jedinice, i izlaz je na nivou logičke jedinice.

X	Y	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logičko I

Na slici nalazi se grafički simbol I kola i oblici napona na njegovim ulazima i izlazu.



Svrha I kola je da se koristi prvenstveno kao kontrolni element, vidimo da pomoću jednog ulaza regulišemo propuštanje ulaznih vrednosti s drugih ulaza.

Logičko ILI

Logičko ILI , odnosno funkcija disjunkcije, predstavlja logički zbir nezavisno promenljivih, jednačina ($F_{ZE} = A+B$). Kola koja realizuju ILI funkciju nazivamo logičkim ILI kolima (OR).

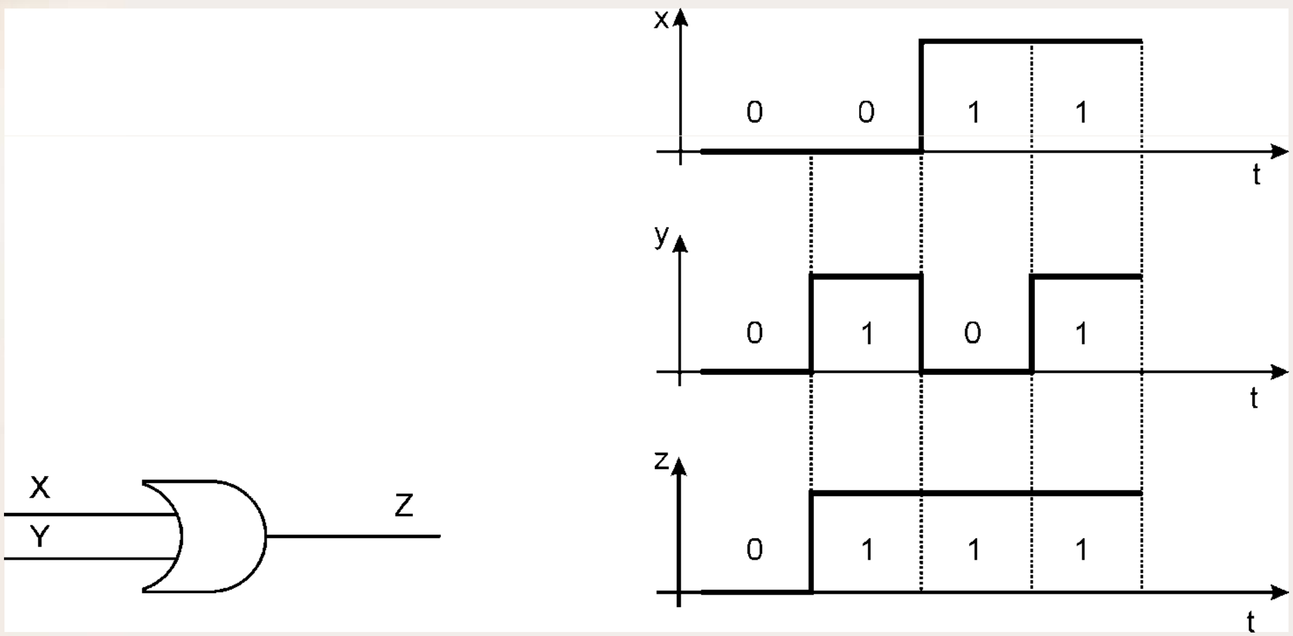
Logičko ILI

Ako želimo da izlaz ILI kola ima potencijal logičke jedinice dovoljno je da bilo koji od njegovih ulaza ima vrednost 1 (tabela).

X	Y	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logičko ILI

Ovo je ilustrovano vremenskim dijagramima na ulaznim i izlaznim priključcima (slike). Na istoj slici prikazan je i simbol ILI kola.



Negacija (invertovanje)

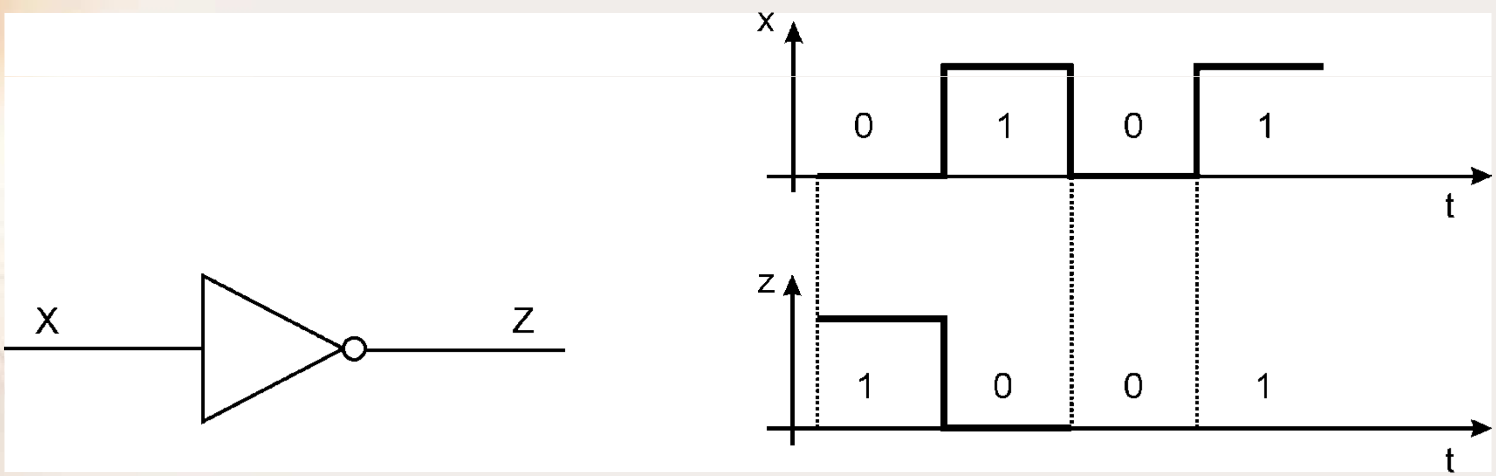
Negacija **ili** ***invertovanje*** **čini značajnu operaciju u logičko prekidačkim kolima.**

Ova kola se u logičkom smislu primenjuje za invertovanje (komplementovanje) logičkih stanja.

U algebarskoj matematici se negacija označava crtom iznad promenljive.

Negacija (invertovanje)

Simbol invertora(NE kola) prikazan je na slici .



Negacija (invertovanje)

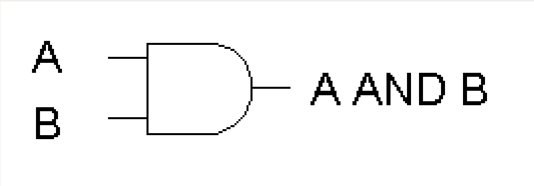
Invertor se takođe često koristi u zajednici s drugim logičkim elementima tada se predstavljan samo malim kružićem vezanim za odgovarajući logički priključak.

X	Z
0	*1*
1	*0*

Funkcija AND (I)

- Konjukcija

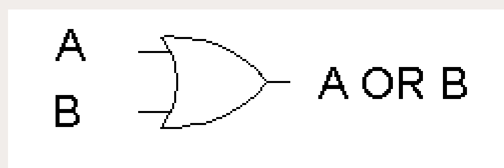
A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Funkcija OR (ILI)

- Disjunkcija

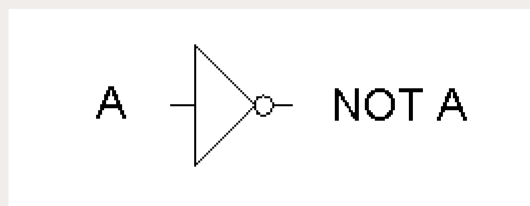
A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Funkcija NOT (NE)

- Negacija

A	NOT A
0	1
1	0

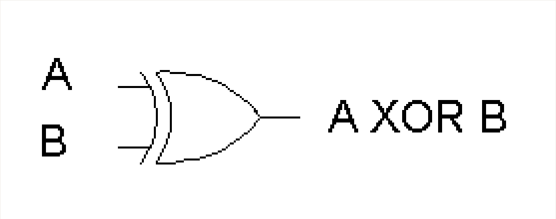


Funkcija XOR

- Ekskluzivno ILI (isključivo ILI)

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$$

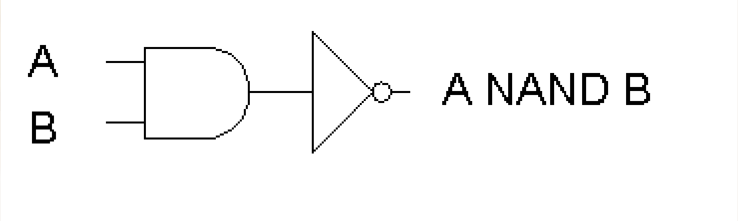
A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

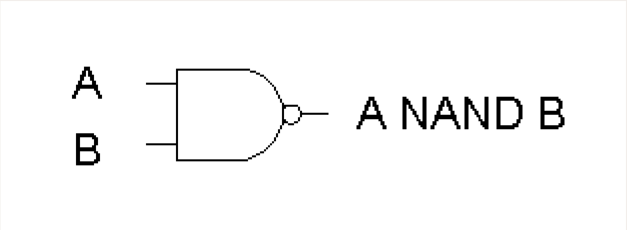


Funkcija NAND (NI)

- Negacija konjukcije
- Tehnološki se lakše pravi od I kola

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

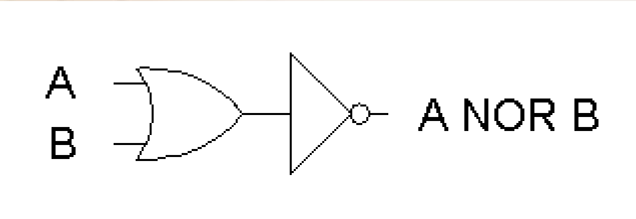


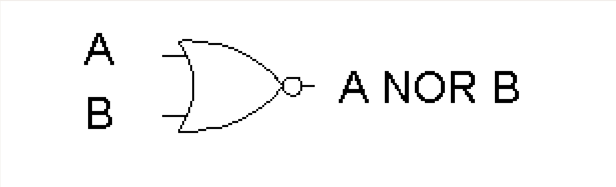


Funkcija NOR (NILI)

- Negacija disjunkcije
- Tehnološki se lakše pravi od ILI kola

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



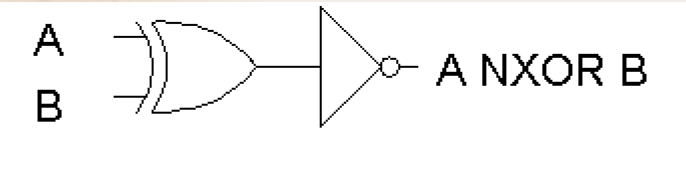


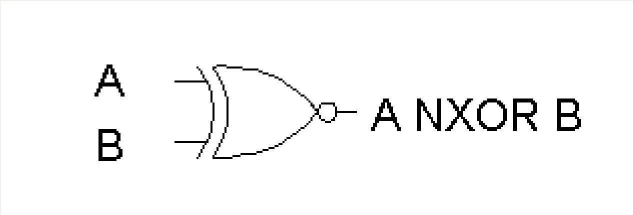
Funkcija NXOR

- Ekskluzivno NILI (isključivo NILI)

$$Y = \overline{A}\overline{B} + AB$$

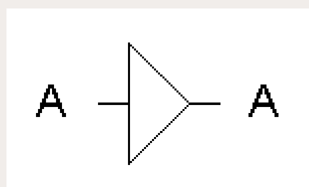
A	B	A NXOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1





Bafer

- Bafer služi za unificiranje ulaza i izlaza (karakteristike moraju biti po standardima).
- Ima ekstra pojačan izlaz (daje veću struju)



Aksiome i teoreme Bulove algebre

Osnovne teoreme:

T-1: Teorema idempotentnosti:

$$x + x = x \qquad x \cdot x = x$$

T-2: Teorema o nultim elementima:

$$x + 1 = 1 \qquad x \cdot 0 = 0$$

T-3: Teorema o involuciji:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

T-4: Teorema o apsorpciji:

$$x + x \cdot y = x \qquad x \cdot (x + y) = x$$

T-5: Teorema o asocijativnosti:

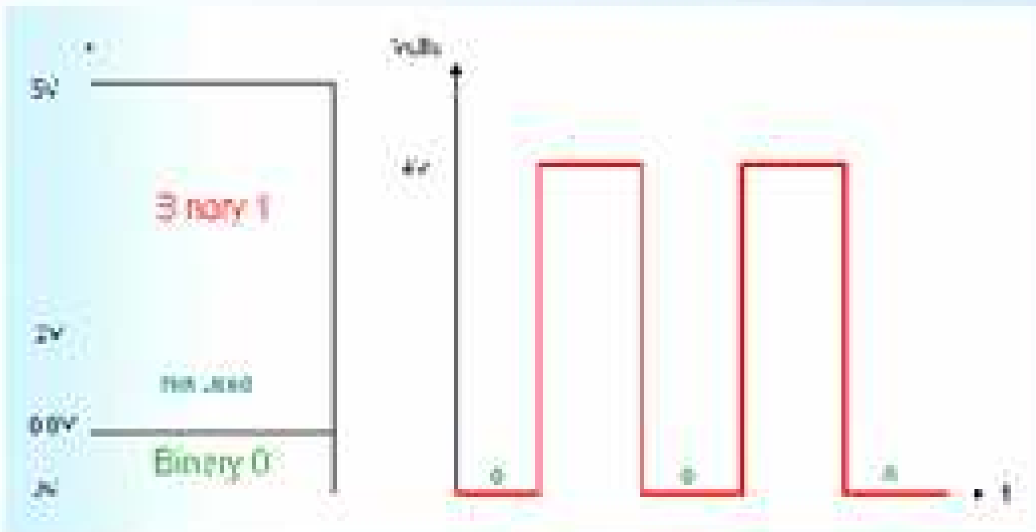
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

T-6: De-Morganove teoreme:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

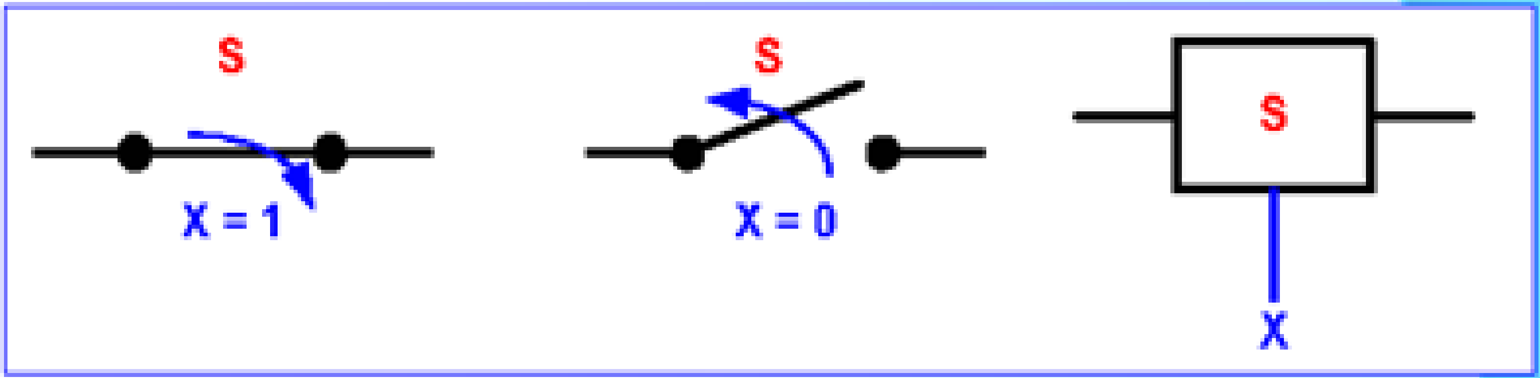
Aksiome i teoreme Bulove algebre

- Bulova algebra omogućava da se rad digitalnih mreža sačinjenih od elementarnih logičkih kola opiše matematičkim izrazima, odnosno funkcijama
- Bulove promenljive koje mogu da imaju vrednosti **0** ili **1** predstavljaju **logičke nivoe**



Osnovna logička kola

- **Za implementaciju Bulovih algebarskih jednačina koriste se digitalna logička kola** ***gejtovi***
- **Najjednostavniji električni element čiji rad može da se opiše binarnim brojnim sistemom je** ***prekidač:***
  - **Binarna 0 – prekidač je otvoren "OFF"**
  - **Binarna 1 – prekidač je zatvoren "ON"**



Osnovna logička kola

- **Gejt** je elektronsko kolo sa jednim ili više prekidača kojima se upravlja spoljašnjim digitalnim signalom
- **Logička kola se realizuju primenom integrisane tehnologije**
- **Funkcija svakog gejta je definisana *tabelom istinitosti* koja specificira izlaz logičkog kola za sve moguće kombinacije vrednosti ulaznih signala**

Osnovna logička kola

- **Gejt** je elektronsko kolo sa jednim ili više prekidača kojima se upravlja spoljašnjim digitalnim signalom
- Logička kola se realizuju primenom integrisane tehnologije
- Funkcija svakog gejta je definisana *tabelom istinitosti* koja specificira izlaz logičkog kola za sve moguće kombinacije vrednosti ulaznih signala

Osnovna logička kola

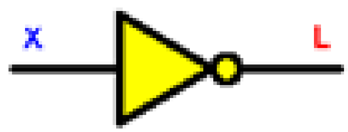
■ INVERTOR

TABELA ISTINITOSTI

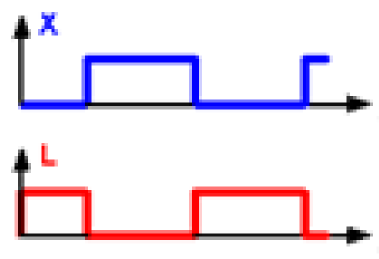
X	L
0	1
1	0

$$L = \overline{X}$$

INVERTOR
NE - KOLO

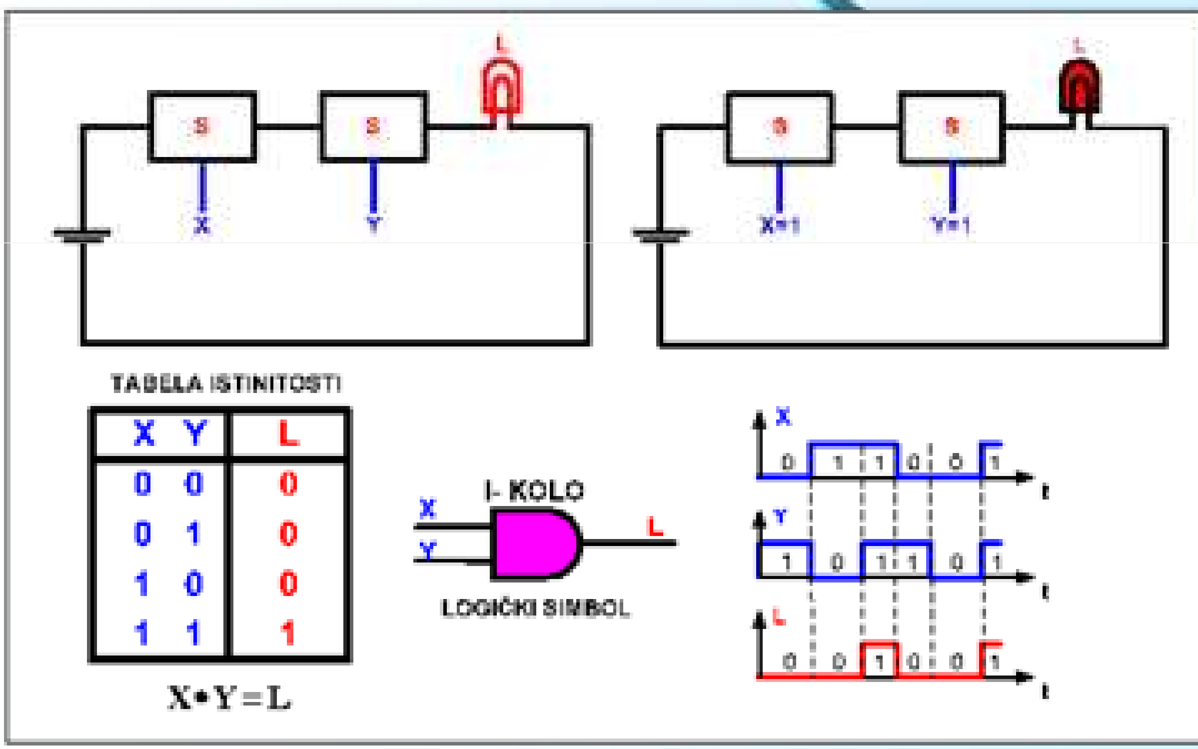


LOGIČKI SIMBOL



Osnovna logička kola

■ I - KOLO (AND)



Osnovna logička kola

■ILI - KOLO (OR)

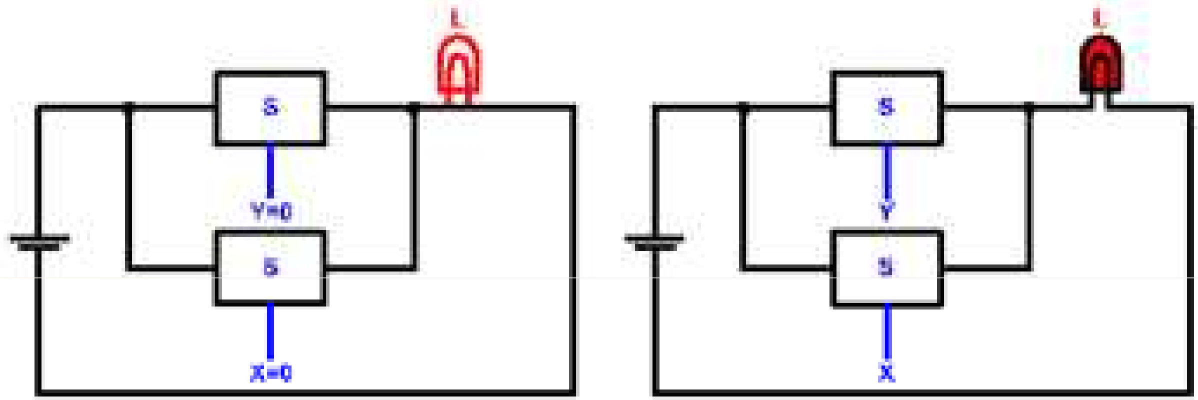
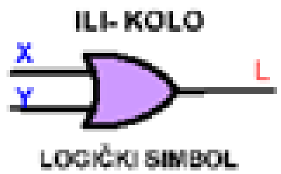
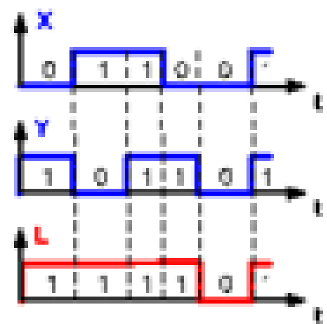


TABELA ISTINITOSTI

X	Y	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

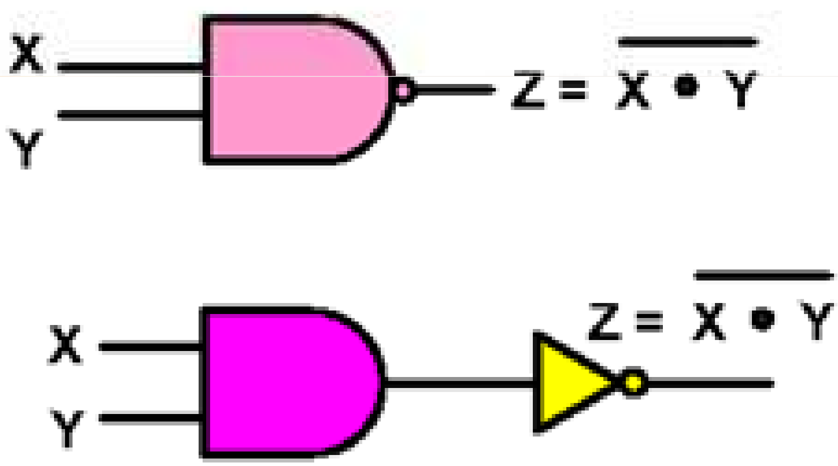
X+Y=L





Osnovna logička kola

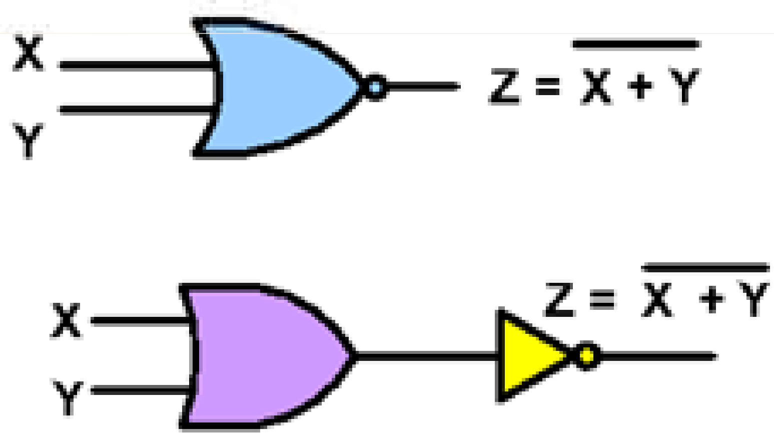
- **NI - KOLO (NAND)**



X	Y	$Z = \overline{X \bullet Y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Osnovna logička kola

■ NILI - KOLO (NOR)



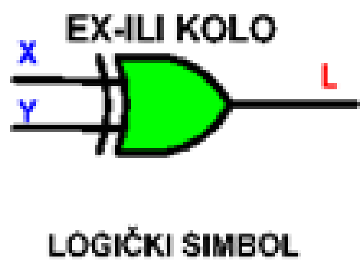
X	Y	$Z = \overline{X + Y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

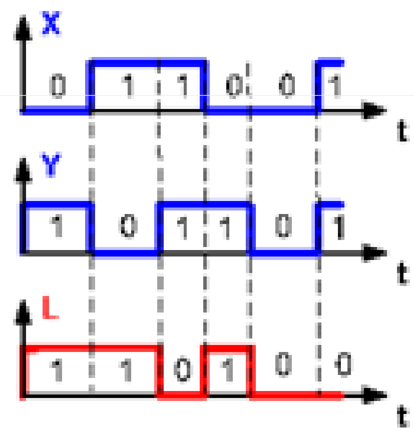
Osnovna logička kola

- **EKSKLUZIVNO ILI KOLO (XOR)**

X	Y	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

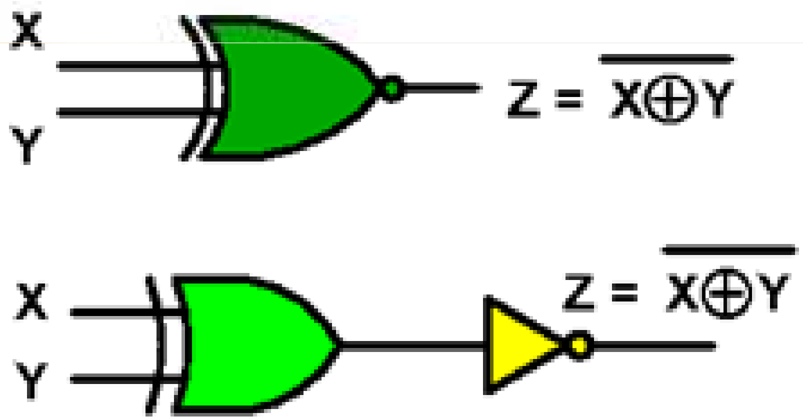
$X \oplus Y = L$





Osnovna logička kola

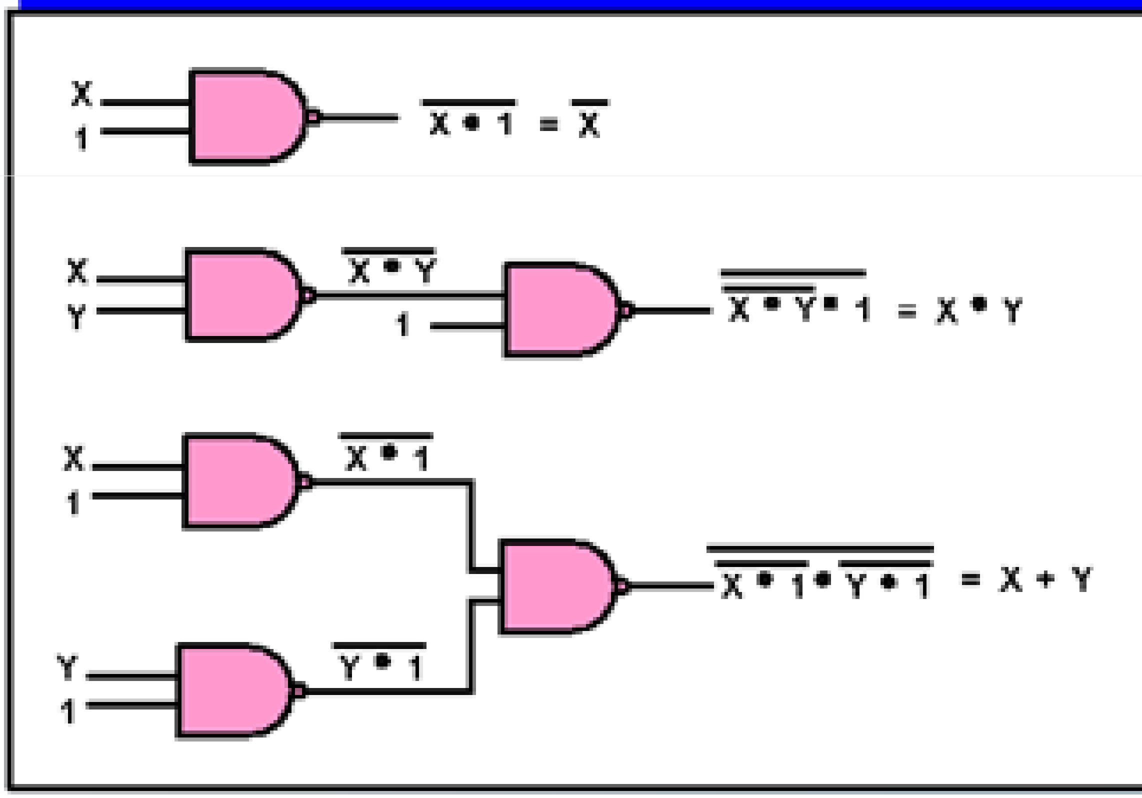
- **EKSKLUZIVNO NILI KOLO (XNOR)**



X	Y	$Z = \overline{X \oplus Y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

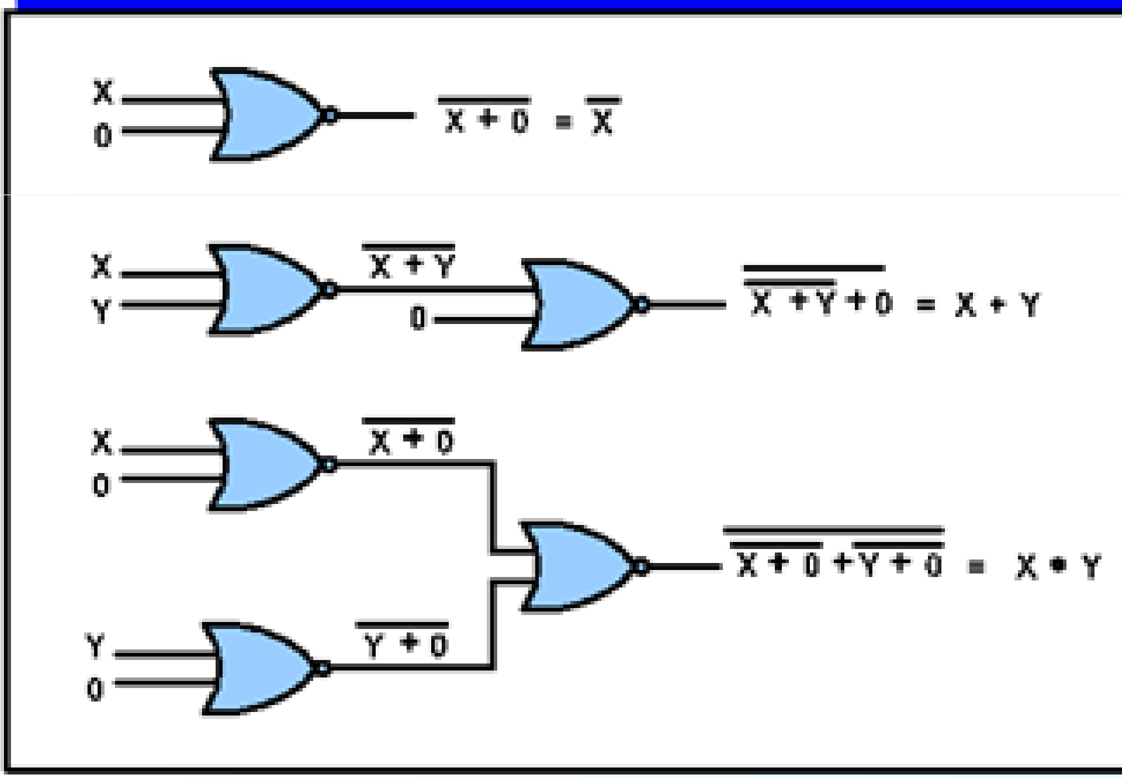
Osnovne logičke operacije sa jednim tipom logičkih kola

- Realizacija NE, ILI i I operacija samo pomoću NI logičkih kola



Osnovne logičke operacije sa jednim tipom logičkih kola

- Realizacija NE, ILI i I operacija samo pomoću NILI logičkih kola

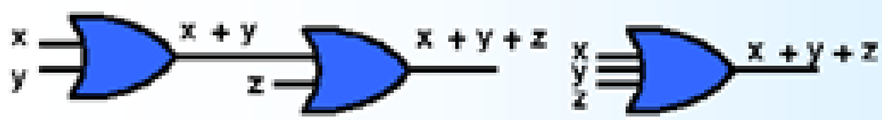


Višeulazna logička kola

- Kada je potrebna primena logičkih operacija nad više ulaza, to se rešava:
  - Upotrebom višeulaznih logičkih kola
  - Povezivanjem više dvoulaznih kola

Višeulazna logička kola

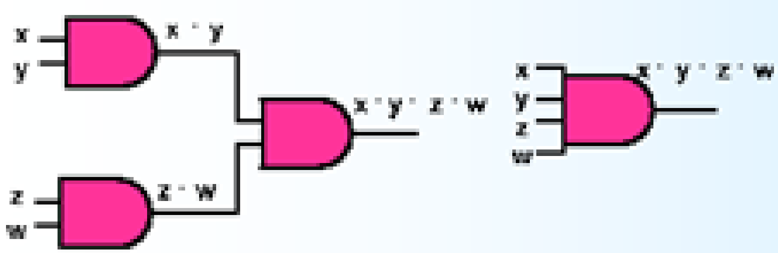
- Tabela istinitosti za troulazno ILI - kolo



i	x y z	F = x + y + z
0	0 0 0	0
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	1
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1

Višeulazna logička kola

- Tabela istinitosti za četvoroulazno I - kolo



i	x y z w	$F = x \cdot y \cdot z \cdot w$
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	0
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	0
⋮	⋮	⋮
14	1 1 1 0	0
15	1 1 1 1	1

Šeferova funkcija

Šeferova funkcija definisana je vrednošću 0 (Z = 0) slučaju da sve nezavisno promenljive imaju vrednost 1.

U svim ostalim slučajevima je Z = 1. Kombinacionu tabela prikazana je na slici.

X	Y	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Šeferova funkcija

Iz ove tabele se može napis algebarski oblik funkcije koristeći konjunktivnu formu:

$$Z = \overline{X} + \overline{Y}$$

Iz jednačine () proizlazi da se NI kolo, realizuje prvo izvršenom negacijom promenjivih X i Y, pa tek onda njihovim propuštanjem kroz ILI kolo.

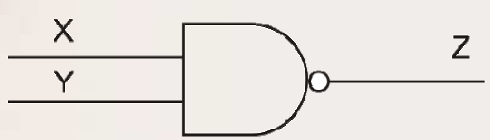
Šeferova funkcija

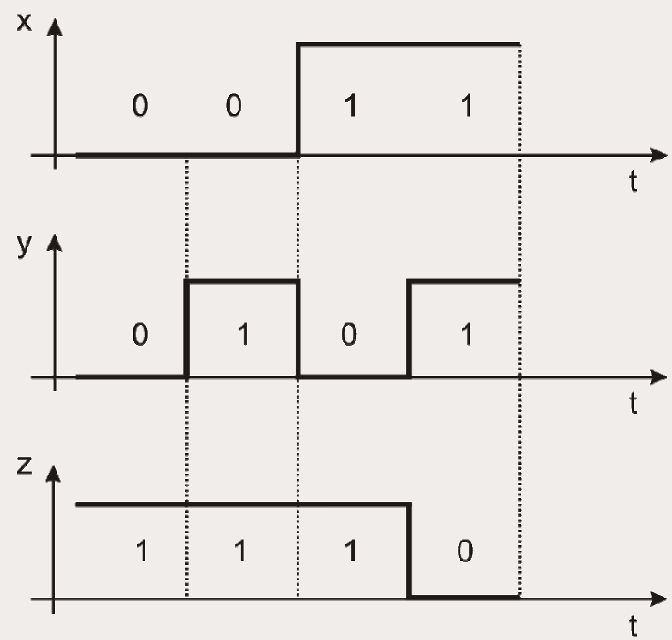
Ako se na jednačinu primene De Morganovi zakoni, biće:

$$Z = \overline{X} + \overline{Y} = \overline{X \cdot Y}$$

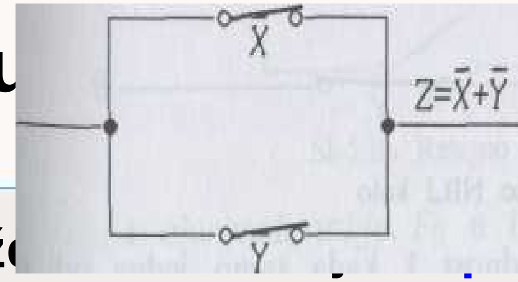
Šeferova funkcija

Kolo koje realizuje Šeferovu funkciju **naziva se NI kolo (NAND).**



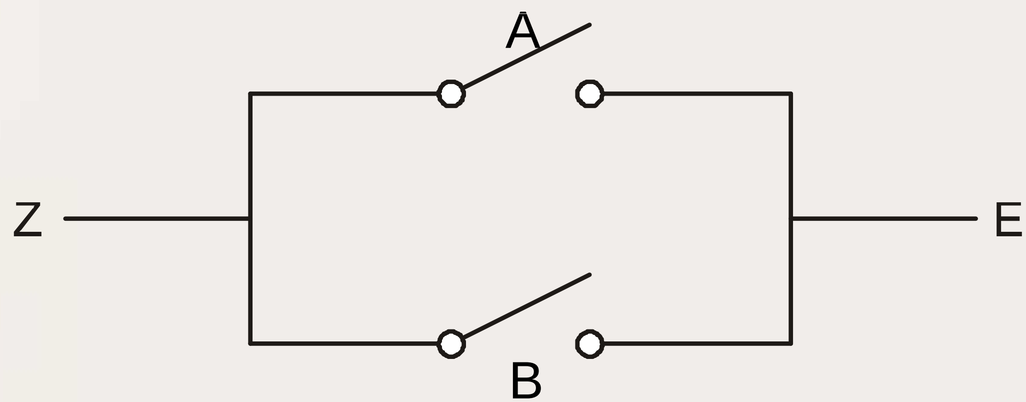


Šeferova fu



Vidimo da se NI kolo mož **moću I kola i invertora, po čemu i nosi naziv.**

Algebarski oblik Šeferove funkcije ukazuje da je ekvivalentna kontaktna šema NI kola u stvari paralelna veza mirnih kontakata releja



Očigledno da je F_{ZE}= 0 tako da je A= B=1, jer su tada, oba kontakta su otvorena.

Pirsova funkcija

Pirsova funkcija definisana je vrednošću 1 (Z = 1) samo u slučaju ako su sve nezavisno promenljive nula.

U svim ostalim slućajevima funkcija ima vrednost nula.

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Pirsova funkcija

Tabelom predstavljena je kombinaciona tabela Pirsove funkcije, iz koje proizilazi disjunktivna forma:

$$Z = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

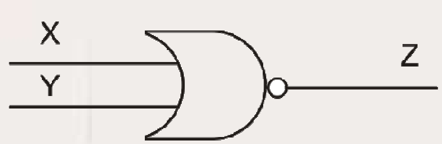
Primenom De Morganovih zakona na ovu algebarsku formu dobija se:

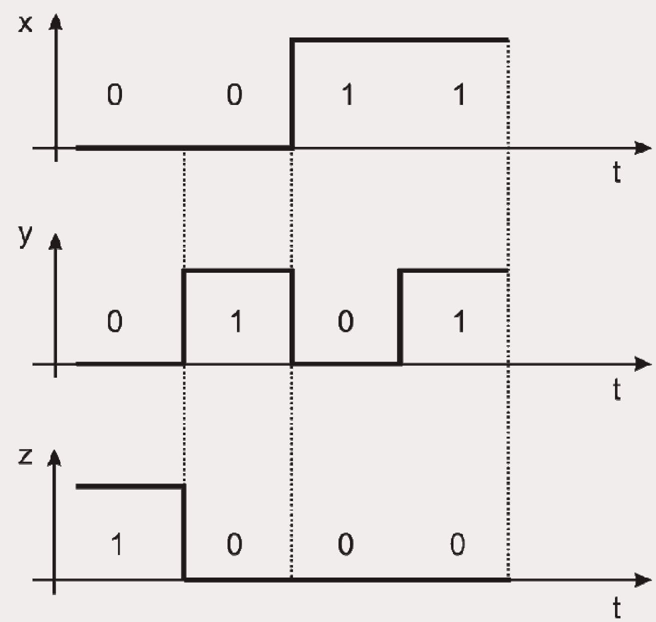
$$Z = \overline{X + Y}$$

Pirsova funkcija

Vidimo da se Pirsova funkcija može formirati pomoću ILI kola i invertora, po čemu to kolo i nosi naziv NILI kolo (NOR).

Realizaciju NILI kola ostvarujmo prvo negacijom nezavisno promenljivih (X i Y)ulaza, pa ih zatim propuštamo kroz I kolo, kao na slici.





Pirsova funkcija

U kolu na ovoj slici između tačaka *A* i *B* postojaće kratak spoj(galvanska veza) (F_{XY} = 1) samo onda kada je A = B = 0. Tada su kontakti zatvoreni, odnosno A = B = 1 (releji nisu pobuđeni).

Ekskluzivna disjunkcija

Ekskluzivna disjunkcija definisana je vrednošću 1 samo u slučaju kada jedna od nezavisno promenljivih ima logičku vrednost 1.

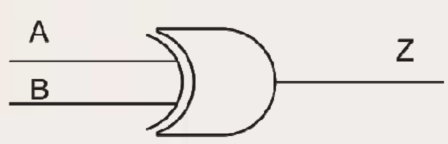
U svim ostalim slučajevima je Z=0. Iz tabele vidimo da će disjunktivna forma funkcije biti:

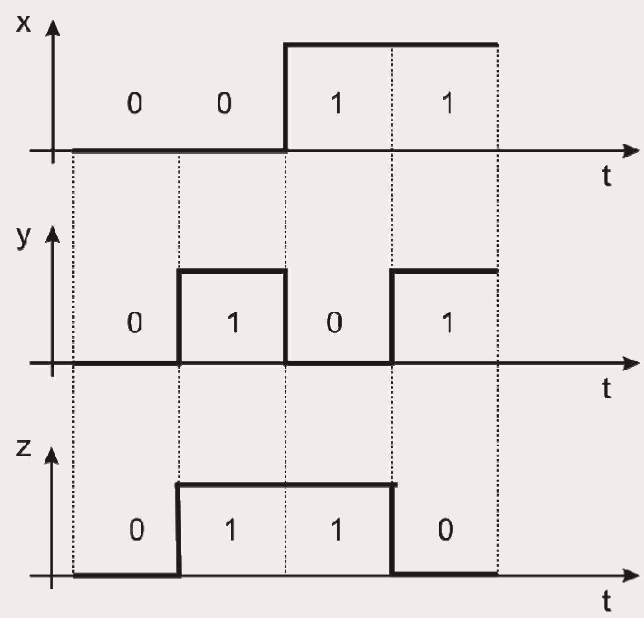
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$$

Ekskluzivna disjunkcija

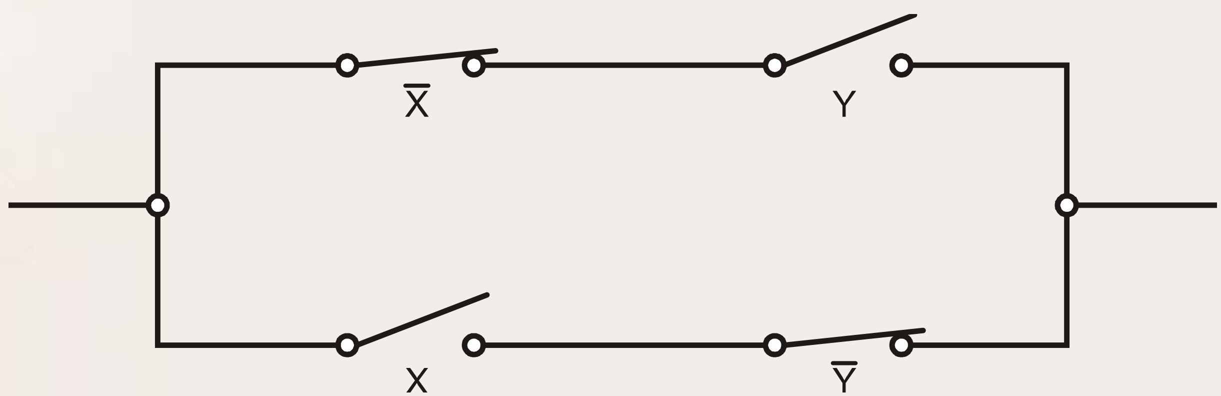
***Ekskluzivno* ILI kolo je kolo koje vrši realizaciju ekskluzivne disjunkcije i označava se simbolom koji vidimo na slikci 5. Takđe na slici 5 rad ovog kola je ilustrovan talasnim oblicima napona na ulazima i izlazu.**





Ekskluzivna disjunkcija

Kada imamo **dve promenljive****, odnosno dva ulazna kola, funkcija Z će biti 1 ako se te promenljive međusobno različite (slika).**



Funkcija ekvivalencije

Funkcija ekvivalencije **dobija se negiranjem ekskluzivne funkcije:**

$$Z = \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y$$

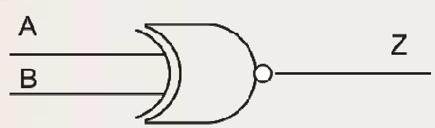
Funkcija ekvivalencije

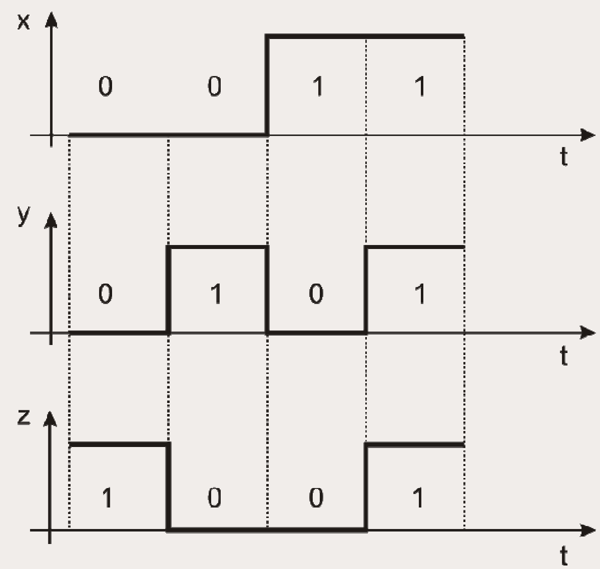
X	Y	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ova funkcija ima vrednost 1 kada su nezavisno promenljive jednake. Kolo koje realizuje ovu funkciju ekvivalencije poznatije je pod nazivom *komparator.*

Funkcija ekvivalencije

Njegov simbol i talasni oblici signala prikazan je na slici.





Funkcija ekvivalencije

Ekvivalentna prekidačka šema komparatora: